ATAMA PROBLEMİ (ATAMA MODELİ)

Bir atama probleminde işlerin makinelere dağıtımı, kişilerin işlere tayini, satış personelinin satış bölgelerine dağıtımı vb. yapılır.

Atama modeli aslında kaynakları işçiler, hedefleri de işler olan özel bir ulaştırma modelidir. Kaynakların sayısının hedeflerin sayısına eşit olması gerekir. Her bir kaynaktaki arz miktarı ve her bir hedefteki talep miktarı daima 1'e eşittir. Yani her işe 1 kişi atanacak ve her iş te 1 kişi tarafından yapılacaktır.

Genel atama modeli aşağıdaki biçimde ifade edilir:

Min Z : $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Kısıtlayıcılar:

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \dots, n)$ ← Talep kısıtları

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \dots, m)$ ← Arz kısıtları

$$x_{ij} = 0 \ veya \ 1$$

Doğrusal amaç fonksiyonu ve kısıtlara sahip olan bu problemi simpleks yöntemle çözmek mümkündür.

Atama problemlerinin çözümün de yaygın olarak kullanılan diğer bir yöntem, **Macar Algoritması'**dır. Bu algoritmada, kaynakların sayısının hedef sayısına eşit olması gerekir. Yani problem dengeli olmalıdır.

Macar algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir:

Adım 1: nxn boyutlu orijinal maliyet matrisindeki her satırın minimumunu bul ve bu değeri, kendi satırındaki değerlerden çıkarak yeni matris oluştur.

Yeni matristeki her sütunun minimumunu bul ve bu değeri, kendi sütunundaki değerlerden çıkarak yeni indirgenmiş maliyet matrisini oluştur.

Adım 2: İndirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfır değerli hücrelerden geçecek şekilde en az sayıda yatay ve dikey çizgiler oluştur. Eğer tüm sıfır değerlerini örtecek şekilde n sayıda çizgi çizilmişse, örtülmüş sıfırlar arasında optimum çözüm mevcuttur. Aksi durumda Adım 3'e git.

Adım 3: Sıfır olmayan en küçük elemanı bul. Bu değeri, indirgenmiş maliyet matrisindeki örtülmemiş elemanlardan çıkar ve iki çizgi ile örtülmüş elemanlara ekle. Daha sonra Adım 2'ye git.

Örnek. Bir fabrikada 4 değişik iş ve bu 4 değişik işten herhangi birini yapabilen 4 işçi vardır. Her işçinin bu işleri yapma süreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Buna göre hangi işçi hangi işi yapmalıdır ki toplam harcanan zaman en küçük olsun.

	İŞÇİ 1	İŞÇİ 2	İŞÇİ 3	İŞÇİ 4
İŞ 1	3	4	4	8
İŞ 2	4	4	6	6
İŞ 3	8	5	6	4
İŞ 4	3	4	4	7

Adım 1. Her satırın en küçük elemanı bulunur ve kendi satırındaki elemanlardan çıkarılır.

	İŞÇİ 1	İŞÇİ 2	İŞÇİ 3	İŞÇİ 4
İŞ 1	3-3	4-3	4-3	8-3
İŞ 2	4-4	4-4	6-4	6-4
İŞ 3	8-4	5-4	6-4	4-4
İŞ 4	3-3	4-3	4-3	7-3

Yeni matris:

	İŞÇİ 1	İŞÇİ 2	İŞÇİ 3	İŞÇİ 4
İŞ 1	**0**	1	**1**	5
İŞ 2	**0**	**0**	2	2
İŞ 3	4	1	2	**0**
İŞ 4	**0**	1	**1**	4

Her sütunu en küçük elemanı bulunur ve kendi sütunundaki elemanlardan çıkarılarak yeni indirgenmiş maliyet matrisini oluşturulur.

İndirgenmiş maliyet matrisi,

	İŞÇİ 1	İŞÇİ 2	İŞÇİ 3	İŞÇİ 4
İŞ 1	0	1	0	5
İŞ 2	0	0	1	2
İŞ 3	4	1	1	0
İŞ 4	0	1	0	4

Olur.

Adım 2. İndirgenmiş maliyet matrisindeki tüm sıfır değerli hücrelerden geçecek şekilde en az sayıda yatay ve dikey çizgiler çizilir.

	İŞÇİ 1	İŞÇİ 2	İŞÇİ 3	İŞÇİ 4
İŞ 1	0	1	0	5
İŞ 2	0	0	1	2
İŞ 3	4	1	1	0
İŞ 4	0	1	0	4

Tüm sıfır değerli hücrelerden geçecek şekilde 4 tane çizgi çizilmiştir. n=4 olduğundan optimum çözüme ulaşıldığı söylenebilir. Buna göre,

İŞ 1 → İŞÇİ 1

İŞ 2 → İŞÇİ 2

İŞ 3 → İŞÇİ 4

İŞ 4 → İŞÇİ 3 olup,

Toplam maliyet: 3+4+4+4 = 15 olur.

ALTERNATİF ÇÖZÜMLER DE MEVCUTTUR.

Porblemi Simpleks yöntemle çözersek;

	İŞÇİ 1	İŞÇİ 2	İŞÇİ 3	İŞÇİ 4
İŞ 1	3	4	4	8
İŞ 2	4	4	6	6
İŞ 3	8	5	6	4
İŞ 4	3	4	4	7

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \quad , & \text{i. iş j. işçi ile eşleşirse} \\ 0 \quad , & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Min Z :} \quad & 3x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14} + \\ & 4x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 6x_{24} + \\ & 8x_{31} + 5x_{32} + 6x_{33} + 4x_{34} + \\ & 3x_{41} + 4x_{42} + 4x_{43} + 7x_{44} \end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ veya } 1 \quad ; \quad \text{tüm i ve j'ler için}$$

(Excel QM Assignment)

COSTS	İşçi 1	İşçi 2	İşçi 3	İşçi 4
İş 1	3	4	4	8
İş 2	4	4	6	6
İş 3	8	5	6	4
İş 4	3	4	4	7

Assignments	İşçi 1	İşçi 2	İşçi 3	İşçi 4	**Row Total**
İş 1	**1**				**1**
İş 2		**1**			**1**
İş 3				**1**	**1**
İş 4			**1**		**1**
Column Total	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**

Total Cost	**15**

Assignment costs	İşçi 1	İşçi 2	İşçi 3	İşçi 4
İş 1	**Assign 3**	**4**	**4**	**8**
İş 2	**4**	**Assign 4**	**6**	**6**
İş 3	**8**	**5**	**6**	**Assign 4**
İş 4	**3**	**4**	**Assign 4**	**7**

İş 1’i İşçi 1’e

İş 2’yi İşçi 2’ye

İş 3’ü İşçi 4’e

İş 4’ü İşçi 3’e VER. Bu durumda minimum maliyet 15 tir.

Örnek. Bir satış yöneticisi, şirketindeki 4 satış elemanını 4 bölgeye atamak zorundadır. Aşağıdaki tabloda, satış elemanlarının deneyim ve yeteneklerine göre bölgelerde mümkün olabilecek karlar verilmiştir. Şirketin karını maksimum yapacak atama nasıl olmalıdır? (Öztürk, A. S.496)

	Bölge 1	Bölge 2	Bölge 3	Bölge 4
Satış elemanı 1	3	4	4	8
Satış elemanı 2	4	4	6	6
Satış elemanı 3	8	5	6	4
Satış elemanı 4	3	4	4	7

Çözüm: (Excel QM Assignment) Objective, MAX YAP

COSTS	B 1	B 2	B 3	B 4
SE 1	35	27	28	37
SE 2	28	34	29	40
SE 3	35	24	32	33
SE 4	24	32	25	28

Assignments	B 1	B 2	B 3	B 4	**Row Total**
SE 1	**1**				**1**
SE 2				**1**	**1**
SE 3			**1**		**1**
SE 4		**1**			**1**
Column Total	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**

Total Cost	**139**

Assignment costs	B 1	B 2	B 3	B 4
SE 1	**Assign 35**	**27**	**28**	**37**
SE 2	**28**	**34**	**29**	**Assign 40**
SE 3	**35**	**24**	**Assign 32**	**33**
SE 4	**24**	**Assign 32**	**25**	**28**

E1 – B1 ; E2 – B4 ; E3 – B3 ; E4 – B2 , MAX Kar = 139